Journal of Number Theory **81**, 270–291 (2000)
doi:10.1006/jnth.1999.2458, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Nombres presque premiers dont l'écriture en base r ne comporte pas certains chiffres

Cécile Dartyge

Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré-Nancy I, BP 239,
F-54506 Vandœuvre Cedex, France
E-mail: dartyge@iecn.u-nancy.fr

et

Christian Mauduit

Institut de Mathématiques de Luminy, CNRS-UPR9016, 163 av. de Luminy, case 907,
F-13288 Marseille Cedex 9, France
E-mail: mauduit@iml.univ-mrs.fr

Communicated by R. Tichy

Received August 24, 1998; revised June 16, 1999; accepted August 1, 1999

The aim of this work is to study the multiplicative properties of integers with missing digits. In particular we prove that if we fix a set $\mathscr{D}\subset\{0, 1, ..., r-1\}$ of digits, $|\mathscr{D}|\geqslant 2$, there are infinitely many almost primes whose digits in base r belong to $\mathscr{D}$.

1. INTRODUCTION

Soient X, t, r des nombres entiers positifs tels que $2\leqslant t<r$. Dans tout cet article, $\mathscr{D}$ représente un sous-ensemble de $\{0, ..., r-1\}$, dont les éléments sont premiers entre eux dans leur ensemble et tel que $|\mathscr{D}|=t$ et $0\in\mathscr{D}$. Cette dernière condition est une condition de commodité qui nous permet d'écarter des situations aberrantes, mais elle pourrait êre facilement retirée.

Nous étudions les propriétés multiplicatives des entiers dont les chiffres intervenant dans leur développement en base r appartiennent à $\mathscr{D}$.

On définit:

$$W_{\mathscr{D}}=\left\{n\in\mathbb{N},\, n=\sum_{0\leqslant j\leqslant s} a_j r^j \text{ avec } a_j\in\mathscr{D},\ j=0, ..., s\right\}, \tag{1.1}$$

0022-314X/00 $35.00

puis pour $X \geqslant 2$,

$$W_{\mathscr{D}}(X) = \{0 \leqslant n < X, n \in W_{\mathscr{D}}\}. \tag{1.2}$$

Les ensembles $W_{\mathscr{D}}(X)$ constituent des familles très fines d'entiers, par exemple si $X = r^N$, $|W_{\mathscr{D}}(X)| = t^N$. De récents travaux se sont attachés à déterminer dans quelle mesure les éléments de $W_{\mathscr{D}}$ vérifiaient des propriétés arithmétiques similaires à la suite des entiers naturels. Erdős, Mauduit et Sárközy [EMS1] ont notamment étudié la répartition dans les progressions arithmétiques des éléments de $W_{\mathscr{D}}$. Ils ont obtenu un résultat correspondant au théorème de Siegel–Walfisz sur la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Plus précisément si on note pour $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$:

$$W_{\mathscr{D}}(X, a, q) = \{n \in W_{\mathscr{D}}(X), n \equiv a (\mathrm{mod}\ q)\}, \tag{1.3}$$

leur résultat est alors le suivant:

THÉORÈME 0 ([EMS1] Théorème 1). *Soient $t, r \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant t < r$. Il existe alors des constantes positives $c_1 = c_1(r, t)$, $c_2 = c_2(r, t)$, $c_3 = c_3(r, t)$, telles que pour tout sous-ensemble $\mathscr{D} \subset \{0, ..., r-1\}$, vérifiant les conditions énoncées au début de l'article, pour tous $X \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}$ vérifiant $(q, r(r-1)) = 1$ et*

$$q < \exp(c_1 \sqrt{\log X}), \tag{1.4}$$

et pour $a \in \mathbb{Z}$, on ait l'inégalité:

$$\left| |W_{\mathscr{D}}(X, a, q)| - \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{q} \right| < c_2 \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{q} \exp\left(-c_3 \frac{\log X}{\log q} \right). \tag{1.5}$$

On trouvera dans [EMS1] et dans [EMS2] des applications de ce théorème ainsi que d'autres résultats sur les propriétés des éléments de $W_{\mathscr{D}}$. Le lecteur trouvera en outre dans ces deux articles des récapitulatifs bibliographiques sur ce sujet.

Dans ce travail, nous montrons que $W_{\mathscr{D}}$ contient une infinité d'entiers presque premiers (c'est-à-dire des entiers ayant peu de facteurs premiers). Pour établir ceci, quitte à retirer des éléments de $\mathscr{D}$, on peut supposer que $\mathscr{D}$ est un ensemble à deux éléments $\mathscr{D} = \{0, d\}$. On remarque ensuite qu'un élément $n \in W_{\{0, d\}}$ est de la forme $n = dn'$ avec $n' \in W_{\{0, 1\}}$, il suffit ainsi d'étudier le cas $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, ce qui sera réalisé au théorème 5.

La recherche de tels entiers s'effectue avec des méthodes de crible. Nous utilisons la minoration standard donnée par le crible linéaire [HR] ou [I], et quand la famille $\mathscr{D}$ est de taille assez importante, nous profitons des résultats issus des cribles pondérés de Richert et de Greaves ([HR], [G1], [G2]). L'application de tels outils passe par l'étude d'un intérêt intrinsèque de la répartition statistique dans les progressions arithmétiques des éléments de $W_{\mathscr{D}}$. On aimerait établir des résultats analogues au théorème de Bombieri–Vinogradov pour la suite des nombres premiers. Plus précisément, il s'agit pour $X \geqslant 2$, de déterminer $Q_0 = Q_0(X)$ le plus grand possible tel que pour tout $A > 0$ il existe $B > 0$ tel que l'on ait l'inégalité:

$$\sum_{\substack{q < Q_0 (\log X)^{-B} \\ (q, r(r-1)) = 1}} \max_{a \bmod q} \left| |W_{\mathscr{D}}(X, a, q)| - \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{q} \right| \ll \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{(\log X)^A}, \tag{1.6}$$

où la constante implicite peut dépendre de r, t. On dit alors que Q_0 est le niveau de distribution de $W_{\mathscr{D}}(X)$. (cf. [I] par exemple.)

La preuve d'inégalités du type (1.6) se déroule en deux étapes. Tout d'abord, lorsque q est "petit" les quantités $W_{\mathscr{D}}(X, a, q)$ sont évaluées individuellement grâce aux lemmes de [EMS1] et de [MS] essentiels à la preuve du théorème 0 énoncé précédemment. Ensuite lorsque q est "grand" elles sont évaluées en moyenne sur q, avec des méthodes analogues à celles des travaux de Fouvry et Mauduit [FM1] et [FM2]. On verra alors que nous serons amenés à étudier les normes $\|G_{N, \mathscr{D}}\|_m$ avec

$$G_{N, \mathscr{D}}(z) = \prod_{0 \leqslant k < N} \frac{u_{\mathscr{D}}(r^k z)}{t}, \tag{1.7}$$

où on a posé:

$$u_{\mathscr{D}}(v) = \sum_{d \in \mathscr{D}} e(dv), \tag{1.8}$$

avec $e(w) = \exp(2i\pi w)$.

Une part importante de ce travail consiste ainsi à déterminer pour $m \in \mathbb{N}^*$ des constantes K_m, telles que d'une part on ait quand $N \to \infty$:

$$\|G_{N, \mathscr{D}}\|_m^m = O(K_m^N), \tag{1.9}$$

et d'autre part:

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial z} (G_{N, \mathscr{D}}(z)^m) \right| dz = O(r^N K_m^N), \tag{1.10}$$

les constantes implicites pouvant éventuellement dépendre de m, r et t. En effet on commencera par montrer le résultat suivant (on note $[u]$ la partie entière de u):

Théorème 1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, et soit une constante $K_m < (1/\sqrt{r})$ vérifiant* (1.9) *et* (1.10).

L'inégalité (1.6) *est alors vérifiée pour* $Q_0 = (K_m)^{-N/m}$, *avec* $N = [\log X/\log r]$.

Pour $m=2$, la norme $\| \ \|_2$ se calcule facilement, on a $\|G_{N,\mathscr{D}}\|_2^2 = t^{-N}$. La condition $K_2 < (1/\sqrt{r})$ devient $t > \sqrt{r}$. On obtient ainsi le

Théorème 2. *Si* $\sqrt{r} < t < r$, *l'inégalité* (1.6) *est vérifiée dès que* $Q_0 \leqslant |W_{\mathscr{D}}(X)|^{1/2}$.

Lorsque $|\mathscr{D}| \leqslant \sqrt{r}$, la norme $\| \ \|_2$ n'est pas suffisante, on a recours à des normes $\| \ \|_\ell$, avec $\ell > 2$. Lorsque ℓ est pair, ces normes se calculent explicitement. Cependant les résultats dépendent de manière essentielle de la famille $\mathscr{D}$ étudiée et il est délicat d'avoir un résultat général. Pour $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, on montre l'égalité: $\|G_{N,\{0,1\}}\|_{2\ell}^{2\ell} = (C_{2\ell}^{\ell}/2^{2\ell})^N$, où $C_{2\ell}^{\ell}$ est le coefficient binomial. Ceci nous permet d'obtenir:

Théorème 3. *Soit* $r \geqslant 3$, *on choisit* $\mathscr{D} = \{0, 1\}$. *Soit* $m \in \mathbb{N}$ *vérifiant l'encadrement*

$$m < r < \frac{2^{4m}}{(C_{2m}^m)^2}. \tag{1.11}$$

On pose $N = [\log X/\log r]$. *L'inégalité* (1.6) *est alors vérifiée pour*

$$Q_0 = \frac{2^N}{(C_{2m}^m)^{N/2m}}. \tag{1.12}$$

La connaissance d'un niveau de distribution Q_0 nous permet maintenant d'appliquer le crible. Cependant la condition $(q, r(r-1)) = 1$ dans l'inégalité (1.6) nous autorise à cribler $W_{\mathscr{D}}(X)$ seulement par l'ensemble des nombres premiers ne divisant pas $r(r-1)$. En fait cette condition $(q, r(r-1)) = 1$ a été instaurée pour éviter des complications qui auraient alourdi les démonstrations des résultats et au paragraphe 7 nous allons évoquer quelles modifications il faut apporter pour établir la

Proposition 4. *Soit* Q_0 *tel que l'inégalité* (1.6) *soit vérifiée. Soient* $\delta \mid r-1$ *et* $\varrho \mid r$. *On note* $N = [\log X/\log r]$. *On définit aussi la fonction suivante*: $\omega(a, \varrho) = |\{d \in \mathscr{D}, d \equiv a \bmod \varrho\}|$.

Soit $E_B(X, \delta, \varrho, Q_0)$

$$= \sum_{\substack{q < Q_0(\log X)^{-B} \\ (q, r(r-1)) = 1}} \max_{a \bmod q\varrho\delta} \left| |W_{\mathscr{D}}(X, a, \delta q \varrho)| - \frac{|W_{\mathscr{D}}(X/r)|\omega(a, \varrho)}{\delta q} \right|.$$

Pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel qu'on ait alors l'inégalité:

$$E_B(X, \delta, \varrho, Q_0) \ll t^N \left(1 - \frac{1}{\delta(r-1)^5}\right)^N \log X + \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{(\log X)^A}. \tag{1.13}$$

On déduit de (1.6) et de (1.13), l'existence d'une fonction multiplicative $\omega_{r, \mathscr{D}}$ vérifiant les conditions d'application du crible linéaire énoncées dans ([I]), (en fait, on a $\omega_{r, \mathscr{D}}(p) = 1$ lorsque $(r, p) = 1$) et telle que pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que:

$$\sum_{\substack{d < Q_0 (\log X)^{-B} \\ \mu^2(d) = 1}} \left| |W_{\mathscr{D}}(X, 0, q)| - \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)| \, \omega_{r, \mathscr{D}}(q)}{q} \right| \ll \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{(\log X)^A}, \tag{1.14}$$

où μ est la fonction de Möbius.

La base r étant fixée, les constantes implicites intervenant dans les conditions d'application du crible énoncées dans [I] peuvent dépendre de r, t, étant donné qu'il nous importe surtout d'avoir un résultat quand $X \to \infty$. Si $Q_0 = X^\alpha$, alors le crible linéaire détecte des éléments non nuls dans $W_{\mathscr{D}}(X)$ dont tous les facteurs premiers sont supérieurs à $X^{(\alpha - \varepsilon)/2}$, $\forall \varepsilon > 0$, et ainsi des entiers possédant au plus $[2/(\alpha - \varepsilon)]$ facteurs premiers.

Pour $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, on verra au paragraphe 8 avec des calculs simples que pour avoir (1.11) il suffit que m vérifie l'inégalité:

$$m < r \leqslant \pi m e^{-1/8m}. \tag{1.15}$$

On y signale aussi que le niveau Q_0 donné dans (1.12) vérifie:

$$Q_0 \geqslant (\pi m)^{N/4m} \, e^{(-N)/32m^2}, \tag{1.16}$$

si bien que quand $r \to \infty$, $Q_0 \geqslant X^{-\pi/4r(1 + o(1))}$.

Bien entendu, (1.15) et (1.16) sont pertinentes lorsque r et ainsi m deviennent importants, pour des petites valeurs de r, il est plus intéressant de faire des calculs directement à partir de (1.11) et (1.12).

Ces estimations de Q_0 et les méthodes de crible conduisent au:

Théorème 5. *Soit $r \geqslant 3$, $\mathscr{D} = \{0, 1\}$. Soit Q_0 vérifiant les conditions* (1.12) *et* (1.11) *du théorème* 3. *Soit $B > 0$ assez grand tel que* (1.6) *soit alors vérifié pour $A = 3$. Pour $z \to \infty$, avec $2 \leqslant z < (Q_0)^{1/2}/(\log X)^{B/2}$, on définit $s = \log(Q_0/(\log X)^B)/\log z$. On a alors la minoration*:

$$\begin{aligned} &|\{n \in W_{\mathscr{D}}(X),\ p \mid n \Rightarrow p > z\}| \\ &\qquad \geqslant (1 - o(1)) \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{\log z} e^{-\gamma} f(s) \prod_{\substack{p \mid r \\ p < z}} \left(1 - \frac{\omega_{r, \mathscr{D}}(p) - 1}{p - 1}\right), \end{aligned}$$

où f est l'usuelle fonction de minoration du crible linéaire (on renvoie le lecteur à [I] pour une définition précise de cette fonction.)

En particulier il existe $k = k(r) \in \mathbb{N}$ tel que:

$$|\{n \in W_{\mathscr{D}}(X), \Omega(n) \leqslant k\}| \gg_r \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{\log X}, \tag{1.17}$$

où $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec leur multiplicité.

Cette inégalité est vérifiée pour k prenant les valeurs suivantes:

r	$k(r)$
3	4
4	5
5	7
6	14

r	$k(r)$
7	15
8	21
9	22
10	23
$r \to \infty$	$\frac{8r}{\pi}(1+o(1))$

Le saut dans le tableau entre les valeurs de k correspondant à $r = 5$ et $r = 6$ provient du fait que pour $r \geqslant 6$ (et aussi pour la première minoration du théorème 5) nous utilisons simplement le crible linéaire (sous la forme par exemple du théorème 1 de [I] ou du théorème 8.4 de [HR]) tandis que pour $r = 3, 4, 5$ nous pouvons utiliser un crible pondéré sous la forme que nous allons présenter dans les lignes qui vont suivre.

On note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier n. Soit $g = \log X/\log Q_0$, g est choisi de telle sorte que tout $n \in W_{\mathscr{D}}(X)$ vérifie $n < Q_0^g$. D'après les travaux de Richert [HR] (Théorème 9.3, p. 253 de [HR]) puis de Greaves [G1], [G2], il existe des constantes δ_R telles que si $g \leqslant R - \delta_R$, alors $W_{\mathscr{D}}(X)$ contient des éléments n tels que $\omega(n) \leqslant R$, ces travaux fournissent en outre une minoration du nombre de tels entiers.

D'après [G1] et [G2], on peut prendre les valeurs de δ_R suivantes:

$$\delta_2 = 0.04456..., \delta_3 = 0.07426..., \delta_4 = 0.10397..., \delta_5 = 0.12203.$$

De plus, si nous pouvons établir pour $z = X^v$ avec $v > 0$, et $z < y$ une majoration de la forme:

$$\sum_{z < p < y} |W_{\mathscr{D}}(X, 0, p^2)| = O\left(\frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{\log X \log z}\right), \tag{1.18}$$

alors il existe des entiers $n \in W_{\mathscr{D}}(X)$, tels que $\Omega(n) \leqslant R$ (et on connaît une minoration du nombre de tels entiers).

Dans [HR], (1.18) est remplacée par une condition plus forte notée (Ω_3), mais comme Greaves l'a remarqué dans [G3], (1.18) est suffisante pour obtenir la minoration (3.7) du théorème 9.3 de [HR] (cf. le bas de la page 255 et la ligne (3.15) p. 256 de [HR]). Cette condition est également assez forte pour profiter des valeurs de δ_R pour $R = 3, 4, 5$ obtenues par Greaves.

Filaseta et Konyvagin [FK] ont montré que (1.18) était réalisé pour $\mathscr{D} = \{0,1\}$ et $r = 3, 4, 5$.

Erdős, Mauduit et Sárközy [EMS1] (Lemme 6 de la section 7) ont par ailleurs établi pour tout $X \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, la majoration:

$$|W_{\mathscr{D}}(X, h, m)| < 2r\, |W_{\mathscr{D}}(X)|\, m^{-(\log t/\log r)}.$$

On en déduit les majorations suivantes pour $z = X^v$ avec $v > 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{z<p<y} |W_{\mathscr{D}}(X, 0, p^2)| &\ll_r |W_{\mathscr{D}}(X)| \sum_{z<p<y} p^{(-2\log t)/\log r}\\ &\ll_r |W_{\mathscr{D}}(X)|\, z^{1-2(\log t/\log r)}\\ &\ll_r \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{\log X\,.\log z},\end{aligned}$$

dès que $t > \sqrt{r}$.

En profitant de tout ceci, on arrive au:

Théorème 6. *Soient X, $\mathscr{D}$, t, r définis comme au début de l'introduction. Il existe $k = k(r) \in \mathbb{N}$ tel que*

$$|\{n \in W_{\mathscr{D}}(X), \Omega(n) \leqslant k\}| \gg_{r, \mathscr{D}} \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{\log X}.$$

En particulier, cette inégalité est vérifiée pour $k(r)$ prenant les valeurs suivantes:

r	$k(r)$
$t > \sqrt{r}$	5
$t \geqslant r^{0.5134}$	4
$t \geqslant r^{0.68381}$	3

Remarque. Le tableau du théorème 6 ne donne que des valeurs de $k(r)$ supérieures à 3. Ceci provient du fait que les niveaux de distribution $Q_0(X)$

sont inférieurs à $(|W_{\mathscr{D}}(X)|)^{1/2}$ donc à $X^{1/2}$ qui est la valeur à dépasser pour espérer obtenir avec du crible pondéré des entiers ayant au plus deux facteurs premiers.

Erdős, Mauduit et Sárközy (théorème 5 de [EMS1]) ont démontré que si t vérifie $t > r^{3/4}$, il existe $c > 0$ $c = c(r, t)$ tel qu'il existe une infinité d'éléments $n \in W_{\mathscr{D}}$ possèdant un diviseur de taille supérieure à n^c de la forme p^2 (où p est premier). Dans ce travail, ils posent ensuite la question suivante: peut-on avoir un résultat du même type lorsque $\mathscr{D} = \{0, 1\}$? (problème 2 de [EMS1]). La méthode mise en place dans la preuve du théorème 5 permet de résoudre ce problème lorsque $r \leqslant 8$:

Théorème 7. *Soit r un entier compris entre* 3 *et* 8. *On prend* $\mathscr{D} = \{0, 1\}$. *Il existe* $c(r) > 0$ *tel que pour* $X \geqslant 2$, *on ait l'inégalité*:

$$|\{n \in W_{\mathscr{D}}(X), \exists p^2 |\, n, X^{c(r)} < p \leqslant 2X^{c(r)}\} \gg \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{X^{c(r)} \log X},$$

où la constante implicite dépend de r et de $c(r)$.

Les paragraphes 2 et 3 sont les premières étapes permettant de ramener les problèmes aux cas où $X = r^N$, puis de transformer les conditions de congruence en sommes d'exponentielles. Le paragraphe 4 fait appel aux ingrédients de [EMS1] essentiels à la preuve du théorème 0 et règle les sommes portant sur des congruences de petits modules. Les paragraphes suivants correspondent aux preuves des théorèmes annoncés suivant les différentes situations de $\mathscr{D}$.

Dans toute la suite de ce travail la lettre q désigne un entier tel que $(q, r(r-1)) = 1$.

2. PREMIÈRES TRANSFORMATIONS

Dans ce paragraphe, en reprenant les opérations faites dans [FM2] ou dans [EMS1], on montre que quitte à rajouter un facteur $\log X$ aux différents termes d'erreurs, on peut se ramener à étudier le cas où $X = r^N$.

On commence par passer aux sommes trigonométriques *via* l'égalité:

$$|W_{\mathscr{D}}(X, a, q)| = \frac{1}{q} \sum_{\ell \bmod q} \sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(X)} e\left(\frac{\ell(n-a)}{q}\right).$$

Le terme $\ell = 0$ fournit le terme principal, et on écrit ainsi:

$$|W_{\mathscr{D}}(X, a, q)| = \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{q} + R_{\mathscr{D}}(X, a, q). \tag{2.1}$$

On écrit ensuite X sous la forme: $X=\sum_{j=1}^{s} b_j r^{v_j}$, avec $b_j \in \{1, ..., r-1\}$, pour $j=1, ..., s$, et $0 \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_s$. Quitte à remplacer X par le plus petit entier supérieur à X appartenant à $W_{\mathscr{D}}$ (cet entier est inférieur à $r^2 X$) on peut supposer que $X \in W_{\mathscr{D}}$, ainsi tous les b_j appartiennent à $\mathscr{D}$. Pour ℓ fixé on décompose ensuite les sommes:

$$\begin{aligned}\sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(X)} e\left(\frac{\ell n}{q}\right) &= \sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(b_s r^{v_s})} e\left(\frac{\ell n}{q}\right) + \sum_{\substack{b r^{v_s} \leqslant n < X \\ n \in W_{\mathscr{D}}(X)}} e\left(\frac{\ell n}{q}\right) \\ &= \sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(b_s r^{v_s})} e\left(\frac{\ell n}{q}\right) + e\left(\frac{b_s r^{v_s} \ell}{q}\right) \sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(X - b_s r^{v_s})} e\left(\frac{\ell n}{q}\right).\end{aligned}$$

En itérant ceci, on obtient:

$$\sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(X)} e\left(\frac{\ell n}{q}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \left| \sum_{n \in W_{\mathscr{D}}(b_i r^{v_i})} e\left(\frac{\ell n}{q}\right) \right|.$$

En reportant dans (2.1) et en utilisant la définition du développement en base r des éléments de $W_{\mathscr{D}}(X)$, on a:

$$\begin{aligned}R_{\mathscr{D}}(X, a, q) &\ll \frac{1}{q} \sum_{1 \leqslant \ell < q} \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \left(\prod_{0 \leqslant k < v_i} \left| \sum_{d \in \mathscr{D}} e\left(\frac{\ell r^k d}{q}\right) \right| \right) \left| \sum_{\substack{d \in \mathscr{D} \\ d < b_i}} e\left(\frac{\ell r^{v_i} d}{q}\right) \right| \\ &\ll \frac{t}{q} \sum_{1 \leqslant \ell < q} \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \prod_{0 \leqslant k < v_i} \left| \sum_{d \in \mathscr{D}} e\left(\frac{\ell r^k d}{q}\right) \right|.\end{aligned}$$

Ainsi on a la majoration:

$$\begin{aligned}&\sum_{q < (Q_0/(\log X)^B)} |R_{\mathscr{D}}(X, a, q)| \\ &\quad \ll t \log X \max_{N \leqslant (\log X/\log r)} \sum_{q < (Q_0/(\log X)^B)} \frac{1}{q} \sum_{0 < \ell < q} \left| \prod_{0 \leqslant k < N} \left(\sum_{d \in \mathscr{D}} e\left(\frac{\ell r^k d}{q}\right) \right) \right| \\ &\quad \ll t \log X \max_{N \leqslant (\log X/\log r)} R_{\mathscr{D}}(N), \qquad (2.2)\end{aligned}$$

par définition.

On découpe ensuite la somme $R_{\mathscr{D}}(N)$ en $O(\log X)$ sommes de la forme:

$$R_{\mathscr{D}}(N, Q) = \sum_{Q < q \leqslant 2Q} \frac{1}{q} \sum_{1 \leqslant \ell < q} \left| F_{N, \mathscr{D}}\left(\frac{\ell}{q}\right) \right|, \qquad (2.3)$$

avec

$$F_{n,\mathscr{D}}(x) = \prod_{0 \leqslant k < N} \sum_{d \in \mathscr{D}} e(r^k\, dx).$$

Il nous suffira alors d'établir la majoration:

$$R_{\mathscr{D}}(N, Q) \ll \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{(\log X)^{2+A}}, \tag{2.4}$$

pour $Q < Q_0(\log X)^{-B}$ et $B > 0$ assez grand, pour montrer (1.6).

3. DÉCOUPAGE DE $R_{\mathscr{D}}(N, Q)$.

Comme dans [FM1]–[FM2], nous comptons profiter d'un effet de moyenne sur q. Ceci nécessite un contrôle de l'espacement des points ℓ/q, on commence donc par rendre ces fractions irréductibles.

$$R_{\mathscr{D}}(N, Q) \leqslant \frac{1}{Q} \sum_{u \leqslant Q} \sum_{Q/u < q \leqslant 2Q/u} \sum_{\substack{(\ell, q)=1 \\ \ell \bmod q}} \left| F_{N,\mathscr{D}}\left(\frac{\ell}{q}\right)\right|. \tag{3.1}$$

On effectue ensuite un découpage suivant la taille de u:

$$\begin{aligned} R_{\mathscr{D}}(N, Q) &\leqslant \frac{1}{Q} \sum_{Q_1 \leqslant u \leqslant Q} \sum_{Q/u < q \leqslant 2Q/u} \sum_{\substack{(\ell, q)=1 \\ \ell \bmod q}} \left| F_{N,\mathscr{D}}\left(\frac{\ell}{q}\right)\right| \\ &\quad + \frac{1}{Q} \sum_{u < Q_1} \sum_{Q/u < q \leqslant 2Q/u} \sum_{\substack{(\ell, q)=1 \\ \ell \bmod q}} \left| F_{N,\mathscr{D}}\left(\frac{\ell}{q}\right)\right| \\ &\leqslant R_{\mathscr{D},1}(N, Q) + R_{\mathscr{D},2}(N, Q), \end{aligned} \tag{3.2}$$

par définition, où Q_1 sera précisé plus tard.

Dans $R_{\mathscr{D},1}(N, Q)$, u est “grand”, ainsi q est “petit”, les quantités $|F_{N,\mathscr{D}}(\ell/q)|$ sont évaluées individuellement à l'aide des résultats de [EMS1], tandis que dans $R_{\mathscr{D},2}(N, Q)$, q est “grand”, on suit alors [FM1] et [FM2], on a recours à des techniques du type le grand crible que l'on utilise sous la forme du lemme de Sobolev–Gallagher.

4. MAJORATION DE $R_{\mathscr{D},1}(N, Q)$

D'après (2.3), on a:

$$F_{N,\mathscr{D}}(x) = \prod_{0 \leqslant k < N} \left(\sum_{d \in \mathscr{D}} e(dr^k x) \right)$$

$$= \prod_{0 \leqslant k < N} u_{\mathscr{D}}(r^k x). \tag{4.1}$$

La majoration de $F_{N,\mathscr{D}}(\ell/q)$ repose sur les deux lemmes suivants:

Lemme 4.1 [EMS 1]. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité*:

$$|u_{\mathscr{D}}(\alpha)| \leqslant t \left(1 - \frac{1}{(r-1)^5} \|\alpha\|^2 \right).$$

Lemme 4.2 ([MS]). *Pour $r, m, j, N \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $(r(r-1), m) = 1$, $m \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, pour $N \geqslant 2\,(\log m/\log r) + 8$ et pour $\beta \in \mathbb{R}$, on a la minoration*:

$$\sum_{0 \leqslant k < N} \left\| \beta + \frac{r^k j}{m} \right\|^2 \geqslant \frac{(r-1)^2}{128 r^4} \frac{N}{\log m}.$$

On obtient, en appliquant successivement ces deux lemmes pour $(q, \ell) = 1$:

$$|F_{N,\mathscr{D}}(\ell/q)| \ll t^N \prod_{0 \leqslant k < N} \left(1 - \frac{1}{(r-1)^5} \left\| \frac{r^k \ell}{q} \right\|^2 \right)$$

$$\ll t^N \exp\left(- \sum_{0 \leqslant k < N} \frac{1}{(r-1)^5} \left\| \frac{r^k \ell}{q} \right\|^2 \right)$$

$$\ll t^N \exp\left(- \frac{N}{c \log q} \right) \ll \frac{t^N}{q} \exp\left(- \frac{N}{c' \log q} \right), \tag{4.2}$$

pour $q < \exp(c_2 \sqrt{N})$, où les constantes c, c', c_2 dépendent de r.

En reportant dans (3.2), on obtient:

$$R_{\mathscr{D},1}(N, Q) \ll_r t^N \log\left(\frac{2Q}{Q_1} \right) \exp\left(- \frac{N}{c \log(2Q/Q_1)} \right).$$

En choisissant alors $Q_1 = Q \exp(-c_2 \sqrt{N})$, on a la majoration:

$$R_{\mathscr{D},1}(N, Q) \ll t^N \exp(-c_3 \sqrt{N}), \tag{4.3}$$

où c_3 est une constante positive ne dépendant que de r.

5. MAJORATION DE $R_{\mathscr{D},2}(N, Q)$, PREUVE DU THÉORÈME 2

LEMME 5.1 ([Mo] lemme 1.2). *Soient $T_0, T \geqslant \delta > 0$ des nombres réels, f une fonction de classe C_1 sur l'intervalle $[T_0, T_0+T]$. Soit $\mathscr{I}$ un ensemble de nombres réels sur l'intervalle $[T_0+\delta/2, T_0+T-\delta/2]$, vérifiant $|t-t'| \geqslant \delta$, pour tous réels distincts $t, t' \in \mathscr{I}$. On a alors l'inégalité:*

$$\sum_{t \in \mathscr{I}} |f(t)| \leqslant \frac{1}{\delta} \int_{T_0}^{T_0+T} |f(x)|\, dx + \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_0+T} |f'(x)|\, dx.$$

Notre premier mouvement serait d'appliquer ce lemme en prenant $f = F_{N,\mathscr{D}}$, mais la difficulté est que la fonction $F_{N,\mathscr{D}}$ oscille fortement, on a en effet:

$$\int_0^1 |F'_{N,\mathscr{D}}(x)|\, dx = O_r\left(r^N \int_0^1 |F_{n,\mathscr{D}}(x)|\, dx\right),$$

ce qui comparé à $|W_{\mathscr{D}}(r^N)| = t^N$ est trop imposant, surtout lorsque t est petit par rapport à r. Pour écarter cette difficulté, on applique des inégalités de convexité qui nous permettront de "casser" l'ordre de grandeur de la dérivée.

Soit $m \geqslant 1$. On a:

$$\begin{aligned} |F_{N,\mathscr{D}}(z)|\, t^{-N} &= \prod_{0 \leqslant j < m} \prod_{(jN/m) \leqslant k < ((j+1)N/m)} \left|\frac{u_{\mathscr{D}}(r^k z)}{t}\right| \\ &\leqslant \sum_{0 \leqslant j < m} \prod_{(jN/m) \leqslant k < ((j+1)N/m)} \left|\frac{u_{\mathscr{D}}(r^k z)}{t}\right|^m. \end{aligned} \tag{5.1}$$

(Quitte à retirer un nombre fini de termes (au plus m), on peut supposer que N est un multiple de m). Comme $(q, r) = 1$, en faisant le changement de variables $\ell' = r^{jN/m}\ell$ on vérifie que les produits de (5.1) ont en moyenne sur ℓ, une contribution identique:

$$\sum_{(\ell,q)=1} \prod_{(jN/m) \leqslant k < ((j+1)N/m)} \left|u_{\mathscr{D}}\left(\frac{r^k\ell}{q}\right)\right|^m = \sum_{(\ell,q)=1} \prod_{0 \leqslant k < (N/m)} \left|u_{\mathscr{D}}\left(\frac{r^k\ell}{q}\right)\right|^m.$$

En reportant ceci dans (3.2), on obtient:

$$R_{\mathscr{D},2}(N, Q) \ll \frac{t^N}{Q} \sum_{u < Q_1} \sum_{(Q/u) < q \leqslant (2Q/u)} \sum_{\substack{\ell \bmod q \\ (\ell,q)=1}} \left|G_{(N/m),\mathscr{D}}\left(\frac{\ell}{q}\right)\right|^m, \tag{5.2}$$

où $G_{N,\mathscr{D}} = t^{-N} F_{N,\mathscr{D}}$ est la fonction définie dans l'introduction. On a alors l'inégalité: $|G_{N,\mathscr{D}}(u)| \leqslant |G_{M,\mathscr{D}}(u)|$ pour $M \leqslant N$.

On applique ensuite le lemme 5.1 puis on majore les intégrales rencontrées à l'aide des inégalités (1.10) et (1.11) qui sont des hypothèses du théorème 1:

$$\begin{aligned} R_{\mathscr{D},2}(N,Q) &\ll \frac{t^N}{Q}\sum_{u<Q_1}\left\{\left(\frac{Q^2}{u^2}\right)\int_0^1 |G^m_{M(u),\mathscr{D}}(w)|\,dw+\int_0^1\left|\frac{\partial G^m_{M(u),\mathscr{D}}(w)}{\partial w}\right|dw\right\}\\ &\ll \frac{t^N}{Q}\sum_{u<Q_1}\left(\frac{Q^2}{u^2}+r^{M(u)}\right)K_m^{M(u)}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

avec $M(u)\leqslant N/m$. Le choix optimal de ce paramètre correspond à

$$M(u)=\min\left(\frac{N}{m},\frac{\log(Q^2/u^2)}{\log r}\right).$$

On obtient finalement la majoration:

$$\begin{aligned} R_{\mathscr{D},2}(N,Q) &\ll \frac{t^N}{Q}\sum_{Qr^{-N/2m}\leqslant u<Q_1}\left(\frac{Q^2}{u^2}\right)\exp\left(\log K_m\frac{\log(Q^2/u^2)}{\log r}\right)\\ &\quad+\frac{t^N}{Q}\sum_{u<Qr^{-N/2m}}\frac{Q^2}{u^2}K_m^{N/m}\\ &\ll E_1+E_2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

par définition. Bien entendu, E_2 est nul si $Qr^{-N/2m}<1$.

Si $2(1+(\log K_m/\log r))<1$, on a la majoration:

$$\begin{aligned} E_1 &\ll \frac{t^N}{Q}\sum_{Qr^{-N/2}<u<Q_1}\left(\frac{Q}{u}\right)^{2+2(\log K_m/\log r)}\\ &\ll t^N\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{1+2(\log K_m/\log r)}, \end{aligned}$$

qui est un terme d'erreur admissible puisque dans ce cas $1+2(\log K_m/\log r)<0$. La deuxième somme E_2 du membre de droite de (5.4) vaut alors:

$$E_2\ll t^N Q K_m^{N/m}.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.

6. RÉSULTATS SUR LES INTÉGRALES $\|F_{N,\mathscr{D}}\|_\ell^\ell$, PREUVES DES THÉORÈMES 2 ET 3

On montre dans ce paragraphe le

LEMME 6.1. (i) *Pour $\mathscr{D}$ quelconque on a l'égalité*:

$$\int_0^1 \prod_{0\leqslant k<N} \left|\sum_{d\in\mathscr{D}} e(r^k du)\right|^2 du = |\mathscr{D}|^N.$$

(ii) *Soit $\ell \geqslant 1$, on suppose que $\mathscr{D} \subset [0, r/\ell[$. On a alors l'égalité*:

$$\int_0^1 \prod_{0\leqslant k<N} \left|\sum_{d\in\mathscr{D}} e(r^k du)\right|^{2\ell} du = A_\ell^N,$$

avec

$$A_\ell = \left|\left\{(d_1, d_1', d_2, d_2', \ldots, d_\ell, d_\ell') \in \mathscr{D}^{2\ell}, \text{ tels que } \sum_{1\leqslant j\leqslant\ell} d_j = \sum_{1\leqslant j\leqslant \ell} d_j'\right\}\right|.$$

(iii) *Si $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, $\ell < r$, alors on a l'égalité*:

$$\int_0^1 \prod_{0\leqslant k<N} |1+e(r^k u)|^{2\ell}\, du = (C_{2\ell}^\ell)^N.$$

Preuve de (i). Par définition des fonctions $F_{N,\mathscr{D}}$, on a en effet:

$$\|F_{N,\mathscr{D}}\|_2^2 = \int_0^1 \prod_{0\leqslant k<N} \left(\sum_{d,d'\in\mathscr{D}} e(r^k(d-d')\,x)\right) dx.$$

En développant ce produit, on est amené à calculer des intégrales de la forme:

$$\int_0^1 e\left(x \sum_{0\leqslant k<N} r^k(d(k)-d'(k))\right) dx,$$

avec $d(k)$, $d'(k) \in \mathscr{D}$ pour $0 \leqslant k < N$.

Ces intégrales ne sont pas nulles si et seulement si

$$\sum_{0\leqslant k<N} r^k(d(k)-d'(k)) = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si $d(k) = d'(k)$ pour $0 \leqslant k < N$, d'après l'unicité de l'écriture en base r d'un entier donné. Il y a donc t^N intégrales non nulles, d'où le point (i).

Preuve du point (ii). Comme précédemment les normes $\| \, \|_{2\ell}$ se calculent directement, on a:

$$\begin{aligned}
\|F_{N,\mathscr{D}}\|_{2\ell}^{2\ell} &= \int_0^1 \prod_{0 \leqslant k < N} \left| \sum_{d \in \mathscr{D}} e(r^k du) \right|^{2\ell} du \\
&= \int_0^1 \sum_{(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}'_1, \ldots, \mathbf{d}_\ell, \mathbf{d}'_\ell) \in \mathscr{D}^{2N\ell}} e\left(\sum_{0 \leqslant k < N} r^k \sum_{j=1}^{\ell} (d_j(k) - d'_j(k))\, u \right) du \\
&= \Bigg| \Bigg\{ (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}'_1, \ldots, \mathbf{d}_\ell, \mathbf{d}'_\ell) \in \mathscr{D}^{2N\ell}, \\
&\qquad \sum_{0 \leqslant k < N} r^k \sum_{j=1}^{\ell} (d_j(k) - d'_j(k)) = 0 \Bigg\} \Bigg|,
\end{aligned}$$

où les $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{d}'_i$ sont des vecteurs de $\mathscr{D}^N$, $\mathbf{d}_i = (d_i(0), \ldots, d_i(N-1))$.

On a choisi $\mathscr{D} \subset [0, \ldots, r/\ell[$, pour avoir l'encadrement $0 \leqslant \sum_{j=1}^{\ell} d_j(k) < r$ ce qui nous évite tout problème de retenue. On a ainsi l'équivalence:

$$\sum_{0 \leqslant k < N} r^k \sum_{j=1}^{\ell} (d_j(k) - d'_j(k)) = 0$$

si et seulement si:

$$\sum_{j=1}^{\ell} (d_j(k) - d_j(k)) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant k < N.$$

Le point (ii) est alors clair par définition de A_ℓ.

Preuve de (iii). Dans le cas particulier où $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, pour $\ell < r$, on peut déterminer explicitement les constantes A_ℓ. On a en effet les égalités:

$$\begin{aligned}
A_\ell &= \left| \left\{ (d_1, d'_1, \ldots, d_\ell, d'_\ell) \in \{0, 1\}^{2\ell}, \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} (d_j - d'_j) = 0 \right\} \right| \\
&= \sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell} \left| \left\{ d_1, \ldots, d_\ell \in \{0, 1\}, \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} d_j = k \right\} \right|^2 \\
&= \sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell} (C_\ell^k)^2 \\
&= C_{2\ell}^{\ell}.
\end{aligned}$$

Ceci combiné avec (ii) prouve le point (iii). Pour établir l'égalité entre les coefficients binomiaux $\sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell} (C_\ell^k)^2 = C_{2\ell}^\ell$, on peut par exemple identifier le coefficient de x^ℓ dans les polynômes $(1+x)^{2\ell}$ et $((1+x)^\ell)^2$.

Application aux théorèmes 2 *et* 3. Dans l'introduction, nous avons déjà expliqué comment le point (i) du lemme 6.1 et le théorème 1 permettent d'obtenir le théorème 2.

Pour $\mathcal{D}=\{0,1\}$, le point (iii) du lemme 6.1 annonce que l'on peut prendre en reprenant les notations du théorème 1, $K_m = C_{2m}^m/2^{2m}$ pour $m<r$. La contrainte $K_m < 1/\sqrt{r}$ impose par ailleurs $r<2^{4m}/(C_{2m}^m)^2$ et le niveau Q_0 vaut alors $2^N(C_{2m}^m)^{-N/2m}$, on obtient donc le théorème 3.

7. PREUVE DE LA PROPOSITION 4, ADAPTATION AU CRIBLE

On reprend les notations de cette proposition définies dans l'introduction. Comme au paragraphe 2, on passe aux sommes trigonométriques:

$$|W_{\mathcal{D}}(X,a,\delta q\varrho)| = \frac{1}{\delta q\varrho}\sum_{n\in W_{\mathcal{D}}(X)}\ \sum_{\ell \bmod \delta q\varrho} e\left(\frac{\ell(n-a)}{\delta q\varrho}\right),$$

avec $(\delta,q)=(q,\varrho)=(\varrho,\delta)=1$. Il est en fait plus intéressant de réécrire, à l'aide du théorème de Bezout, cette somme sous la forme:

$$|W_{\mathcal{D}}(X,a,\delta q\varrho)| = \frac{1}{\delta q\varrho}\sum_{n\in W_{\mathcal{D}}(X)}\ \sum_{\substack{0\leqslant \ell_1<q\\ 0\leqslant \ell_2<\delta\\ 0\leqslant \ell_3<\varrho}} e\left((n-a)\left(\frac{\ell_1}{q}+\frac{\ell_2}{\delta}+\frac{\ell_3}{\varrho}\right)\right).$$

Le terme principal est donné par $\ell_1=\ell_2=0$, on le note TP.

$$TP=\frac{1}{\varrho\,\delta q}\sum_{n\in W_{\mathcal{D}}(X)}\ \sum_{0\leqslant \ell_3<\varrho} e\left(\frac{\ell_3(n-a)}{\varrho}\right).$$

Ceci correspond au nombre d'éléments de $W_{\mathcal{D}}(X)$ dont le premier chiffre du développement en base r est congru à a modulo ϱ.

$$\begin{aligned} TP &= \frac{1}{q\delta}\,W_{\mathcal{D}}\left(\frac{X}{r}+O(1)\right)|\{d\in\mathcal{D},\, d\equiv a(\bmod \varrho)\}| \\ &= W_{\mathcal{D}}\left(\frac{X}{r}\right)\frac{\omega(a,\varrho)}{q\delta}+O_r\left(\frac{1}{q\delta}\right). \end{aligned}$$

Ce qui est le terme principal annoncé dans la proposition.

On note $R_{\mathcal{D}}$ le terme d'erreur. Il reste à majorer:

$$R_{\mathcal{D}}(X,a,\varrho\,\delta q) \ll \frac{1}{q\delta\varrho}\sum_{\substack{0\leqslant \ell_1<q\\ 0\leqslant \ell_2<\delta\\ (\ell_1,\ell_2)\neq(0,0)}}\ \sum_{0\leqslant \ell_3<\varrho}\ \sum_{n\in W_{\mathcal{D}}(X)} e\left((n-a)\left(\frac{\ell_1}{q}+\frac{\ell_2}{\delta}+\frac{\ell_3}{\varrho}\right)\right).$$

Lorsque $k \geqslant 1$, $e(r^k \ell_3 \varrho^{-1}) = 1$, la variable ℓ_3 a donc un rôle trivial. Comme au paragraphe 2, on se ramène au cas où $X = r^N$. Il s'agit alors de majorer:

$$\begin{aligned}
&R_{\mathscr{D}}(r^N, \delta q)\\
&\quad = \frac{1}{\delta q} \sum_{\substack{0 \leqslant \ell_2 < \delta \\ 0 \leqslant \ell_1 < q \\ (\ell_1, \ell_2) \neq (0,0)}} \prod_{0 \leqslant k < N} \left| \sum_{d \in \mathscr{D}} e\left(\frac{\ell_1\, d r^k}{q} + \frac{\ell_2\, d r^k}{\delta} \right) \right|\\
&\quad = \frac{1}{\delta q} \sum_{0 < \ell_2 < \delta} \prod_{0 \leqslant k < N} \left| u_{\mathscr{D}} \left(\frac{r^k \ell_2}{\delta} \right) \right| + \frac{1}{\delta q} \sum_{\substack{0 < \ell_1 < q \\ 0 \leqslant \ell_2 < \delta}} \prod_{0 \leqslant k < N} \left| u_{\mathscr{D}} \left(\frac{r^k \ell_1}{q} + \frac{r^k \ell_2}{\delta} \right) \right|\\
&\quad = R_0(N) + R_1(N).
\end{aligned}$$

On commence par majorer $R_0(N)$. Etant donné que $\delta \mid r-1$, pour $k \geqslant 1$, on a l'égalité:

$$e\left(\frac{d r^k \ell}{\delta} \right) = e\left(\frac{d(r^k - 1)\, \ell + d\ell}{\delta} \right) = e\left(\frac{d\ell}{\delta} \right).$$

On obtient donc la majoration:

$$R_0(N) \ll \frac{1}{q\delta} \sum_{\ell = 1}^{\delta - 1} \left| \sum_{d \in \mathscr{D}} e\left(\frac{\ell d}{\delta} \right) \right|^N.$$

D'après le lemme 2 de [EMS1] rappelé au paragraphe 4 sous la forme du lemme 4.1, on a la majoration:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{d \in \mathscr{D}} e\left(\frac{\ell d}{\delta} \right) \right| &\leqslant t \left(1 - \frac{1}{(r-1)^5} \left\| \frac{\ell}{\delta} \right\| \right)\\
&\leqslant t \left(1 - \frac{1}{\delta (r-1)^5} \right).
\end{aligned}$$

Finalement, en sommant ensuite sur ℓ, on obtient

$$R_0(N) \leqslant \frac{t^N}{q} \left(1 - \frac{1}{\delta (r-1)^5} \right)^N.$$

Maintenant, on estime $R_1(N)$, la contribution pour $\ell_2 \neq 0$. Comme au paragraphe 3, après avoir effectué un découpage dyadique, on rend les fractions ℓ_2 / q irréductibles:

$$\begin{aligned} R_1(N) &\ll \frac{1}{\delta Q} \sum_{u \leqslant Q} \sum_{(Q/u) < q \leqslant (2Q/u)} \sum_{\ell_1 = 1}^{\delta} \sum_{\substack{\ell_2 = 1 \\ (q, \ell_2) = 1}} \prod_{0 \leqslant k < N} u_{\mathscr{D}}\left(\frac{r^k \ell_2}{q} + \frac{\ell_1}{\delta}\right) \\ &\ll \sum_{u \geqslant Q_1} \cdots + \sum_{u < Q_1} \cdots \\ &\ll R_{11}(N) + R_{12}(N). \end{aligned}$$

La somme sur $u \geqslant Q_1$ s'estime de la même manière qu'au paragraphe 4, on majore trivialement la somme sur les ℓ_1 mod δ. Pour $u < Q_1$, on a recours au lemme 5.1, comme on l'a fait au paragraphe 1. On est amené alors à majorer

$$\int_0^1 \prod_{0 \leqslant k < N} \left| u_{\mathscr{D}}\left(r^k \left(w + \frac{\ell_1}{\delta}\right)\right)\right|^m \frac{dw}{t^m} = \int_0^1 |G_{N, \mathscr{D}}(w)|^m \, dw,$$

car d'une part $\delta \mid r-1$ et d'autre part $G_{N, \mathscr{D}}$ est périodique de période 1. Les raisonnements effectués aux précédents paragraphes restent donc valables ici. Ceci finit la preuve de la proposition 4.

8. CAS OÙ $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, PREUVE DU THÉORÈME 5

Pour $\mathscr{D} = \{0, 1\}$, d'après le point (iii) du lemme 6.1, pour $r > m \geqslant 1$, on a

$$\| G_{N, \mathscr{D}} \|_{2m}^{2m} = \left(\frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}\right)^N = K_{2m}^N.$$

Il s'agit ainsi de trouver un entier $m < r$ tel qu'on ait $K_{2m} < r^{-1/2}$ (c'est la contrainte du théorème 2) c'est-à-dire vérifiant:

$$r < \frac{2^{4m}}{(C_{2m}^m)^2}. \tag{8.1}$$

Le formule de Stirling fournit alors l'encadrement pour $n \geqslant 1$ (cf. par exemple ex. I.0.3 de [TW]):

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, e^{R_n}, \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant R_n < \frac{1}{8n}.$$

On en déduit les inégalités:

$$\begin{aligned}\frac{2^{2m}e^{-1/4m}}{\sqrt{\pi m}} &\leqslant C_{2m}^m \leqslant \frac{2^{2m}e^{1/16m}}{\sqrt{\pi m}},\\ \frac{2^{4m}}{(C_{2m}^m)^2} &\geqslant \pi m e^{-1/8m}.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Ainsi pour avoir l'inégalité (8.1), il suffit que m vérifie

$$\pi m e^{-1/8m} > r.$$

Pour $r \geqslant 4$ un tel entier $m < r$ existe et pour $r = 3$, on vérifie directement que (8.1) est vérifiée pour $m = 1$. Le théorème 1 nous dit alors que l'on peut prendre un niveau Q_0 de la forme

$$Q_0 = K_{2m}^{-N/2m} = \frac{2^N}{(C_{2m}^m)^{N/2m}} \tag{8.3}$$

En reportant (8.2) dans (8.3) on obtient:

$$(\pi m)^{N/4m} e^{(-N)/32m^2} \leqslant \frac{2^N}{(C_{2m}^m)^{N/2m}} \leqslant (\pi m)^{N/4m}\, e^{N/8m^2}.$$

9. PREUVE DU THÉORÈME 7

Le théorème 7 est une conséquence de la proposition suivante:

PROPOSITION 9.1. *Soit* $r \geqslant 3$, *tel qu'il existe* $\ell < r$ *vérifiant* $r < (2^{2\ell}/C_{2\ell}^{\ell})^{4\ell/3}$. (*Pour* $3 \leqslant r \leqslant 8$, *cette condition est réalisée.*)

Soit $X > 1$, *on pose* $N = [\log X/\log r]$. *Pour tout* $M < N/2\ell$, *pour tout* P *vérifiant*:

$$\left(\frac{rC_{2\ell}^{\ell}}{4^{\ell}}\right)^M < P < \left(\frac{4^{\ell}}{C_{2\ell}^{\ell}}\right)^{M/3},$$

on a l'inégalité

$$\sum_{P<p<2P} \left| |W_{\mathscr{D}}(X, 0, p^2)| - \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{p^2} \right| \ll \frac{|W_{\mathscr{D}}(X)|}{P(\log X)^3},$$

où la constante implicite dépend de r.

Démonstration. Comme précédemment on traduit tout en terme de sommes d'exponentielles. En refaisant les opérations du paragraphe 2, on vérifie que l'on peut se ramener au cas où $X = r^N$, quitte à multiplier par $\log X$ le terme d'erreur final. On note R le terme de gauche à évaluer de la proposition 9.1 pour $X = r^N$. Il vaut:

$$R = \sum_{P < p \leqslant 2P} \frac{1}{p^2} \sum_{1 \leqslant m < p^2} \prod_{0 \leqslant k < N} \left(1 + e\left(\frac{mr^k}{p^2}\right)\right).$$

On rend ensuite les fractions irréductibles:

$$\begin{aligned} R &\ll \frac{1}{P^2} \sum_{P < p < 2P} \sum_{1 \leqslant m < p} \prod_{0 \leqslant k < N} \left(1 + e\left(\frac{mr^k}{p}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{P^2} \sum_{P < p < 2P} \sum_{\substack{1 \leqslant m < p^2 \\ (m, p) = 1}} \prod_{0 \leqslant k < N} \left(1 + e\left(\frac{mr^k}{p^2}\right)\right) \\ &\ll A + B, \end{aligned}$$

par définition. La quantité A s'évalue comme au paragraphe 8. Pour $\ell < r$, on a

$$A \ll 2^N \left(\frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4\ell}\right)^{M_\ell} + \frac{2^N}{P^2}\left(r\,\frac{C_{2\ell}^{\ell}}{4\ell}\right)^{M_\ell}, \tag{9.1}$$

avec $M_\ell \ll N/2\ell$.

De la même manière on établit pour B, $\lambda < r$ et $M_\lambda \leqslant N/2\lambda$:

$$B \ll 2^N P^2 \left(\frac{C_{2\lambda}^{\lambda}}{4^\lambda}\right)^{M_\lambda} + \frac{2^N}{P^2}\left(\frac{rC_{2\lambda}^{\lambda}}{4^\lambda}\right)^{M_\lambda}. \tag{9.2}$$

En prenant $\ell = \lambda$, on voit que $A \ll B$. Il nous suffit donc de majorer B. D'après (9.2) P convient si P vérifie d'une part

$$P^3 \leqslant \left(\frac{4^\lambda}{C_{2\lambda}^{\lambda}}\right)^{M_\lambda}, \tag{9.3}$$

et d'autre part:

$$P > \left(\frac{rC_{2\lambda}^{\lambda}}{4^\lambda}\right)^{M_\lambda}, \tag{9.4}$$

à des puissances négatives de N près.

Les inégalités (9.3) et (9.4) sont compatibles si et seulement si, il existe $M_\lambda \leqslant N/2\lambda$ tel que

$$r^{M_\lambda} < \left(\frac{4^\lambda}{C_{2\lambda}^\lambda}\right)^{4M_\lambda/3}. \tag{9.5}$$

Cette condition impose

$$r < \left(\frac{4^\lambda}{C_{2\lambda}^\lambda}\right)^{4/3}. \tag{9.6}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 9.1.

Pour $r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$, $\lambda = r-1$ vérifie l'inégalité (9.6). On peut alors prendre comme exposant $c(r)$ (avec les notations du théorème 7):

$$c(r) = \frac{\log 4}{6 \log r} - \frac{\log(C_{2r-2}^{r-1})}{6(r-1) \log r}.$$

RÉFÉRENCES

[EMS1] P. Erdős, C. Mauduit, et A. Sárközy, On arithmetic properties of integers with missing digits I: distribution in residue classes, *Journal of Number Theory* **70**, No. 2 (1998), 99–120.

[EMS2] P. Erdős, C. Mauduit, et A. Sárközy, On arithmetic properties of integers with missing digits II: prime factors, *Discrete Math*. **200** (1999), 149–154.

[FK] M. Filaseta et S. Konyagin, Squarefree values of polynomials all of whose coefficients are 0 and 1, *Acta Arith*. **74**, No. 3 (1996), 191–205.

[FM1] E. Fouvry et C. Mauduit, Sommes de chiffres et nombres presque premiers, *Math. Ann*. **305** (1996), 571–599.

[FM2] E. Fouvry et C. Mauduit, Méthodes de crible et fonction somme de chiffres, *Acta Arith*. **77**, No. 4 (1996), 339–351.

[G1] G. Greaves, Rosser's sieve with weights, *in* "Recent Progress in Analytic Number Theory" (H. Halberstam et C. Hooley, Eds.), Vol. 1, pp. 61–68, Academic Press, 1981.

[G2] G. Greaves, Some remarks on the sieve method, *in* "Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups, (Oslo 1987)" (Aubert, Bombieri et Goldfeld, Eds.), pp. 289–308, Academic Press, Boston, 1989.

[G3] G. Greaves, An application of a theorem of Barban, Davenport and Halberstam, *Bull. London Math. Soc*. **6** (1974), 1–9.

[HR] H. Halberstam et H. E. Richert, "Sieve Methods," Academic Press, New York, 1974.

[I] H. Iwaniec, A new form of the error term in the linear sieve, *Acta Arith*. **37** (1980), 95–123.

[MS] C. Mauduit et A. Sárközy, On the arithmetic structure of the integers whose sum of digits is fixed, *Acta Arith.* **81**, No. 2 (1997), 145–173.

[Mo] H. L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory, *in* "Lecture Notes in Mathematics," Vol. 227, Springer, Berlin, 1971.

[TW] G. Tenenbaum et J. Wu, "Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres," Cours spécialisés, Vol. 2, Société Mathématique de France, 1996.